

9. Точка  $M$  рівномірно обертається навколо деякої прямої і одночасно переноситься рівномірним рухом паралельно цій прямій. Лінія, що описується точкою  $M$ , називається гвинтовою лінією. Скласти рівняння цієї лінії.

10. Скласти параметричне рівняння кривої  $y^2 = x, x^2 = z$ .





11. Якому класу регулярності належить лінія  $\gamma$ , що задана рівняннями

$$x = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & \text{якщо } t < 0, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } t > 0, \end{cases} \quad y = t, \quad z = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } t \leq 0, \\ e^{\frac{1}{t}}, & \text{якщо } t > 0 \end{cases}$$

12. Встановити, чи еквівалентні наступні параметризації :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases}, i \begin{cases} x = a \cos (\tau^3 + 1) \\ y = a \sin (\tau^3 + 1) \\ z = h(\tau^3 + 1) \end{cases}$$

Де  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $-1 \leq \tau \leq \sqrt[3]{2\pi - 1}$ .

13. Довести, що параметризації  $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 4\pi$  і  $x = \cos \tau^2, y = \sin \tau^2, z = 2\tau, 0 \leq \tau \leq 2\pi$  не еквівалентні.

14. Написати параметричне рівняння кривої  $y^2 = 2px$ ,  $x + y - z = 0$ .

15. Записати рівняння дотичної до лінії  $\vec{r} = \left\{ \frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2} \right\}$  в довільній точці, де  $t \neq 0$ .

16. Довести, що дотична до гвинтової лінії  $x = acost$ ,  $y = asint$ ,  $z = ht$  утворює постійний кут з віссю OZ.

17. Знайти дотичну до лінії  $x = 3t - t^3$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 3t + t^3$ , яка перпендикулярна до вектора  $\vec{a} = \{3, 1, 1\}$ .

18. Скласти рівняння дотичної до лінії  $\vec{r} = \{t^2, t, e^t\}$ , яка паралельна до площини  $x - 2y - 5 = 0$ .



19. Довести, що якщо дотичні гладкої кривої проходять через одну точку, то крива є відрізком, півпрямною або прямою.
20. Довести, що якщо дотичні кривої паралельні деякій площині, то крива є плоскою.

1. Знайти довжину дуги гвинтової лінії  $\mathbf{r} = \{x = 3a \cos t, y = 3a \sin t, z = 4at\}$  від точкиї перетину з площиною  $XOY$  до довільної точки  $\mathbf{M}(t)$ .
2. Знайти довжину одного витка між двома точка перетину з площиною  $y = 0$  лінії  $x = a(t - \sin t), y = a \cdot (1 - \cos t), z = 4a \cos \frac{t}{2}$ .

3. Довести, що замкнена лінія  $\vec{r} = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$  має довжину  $s = 10$ .
4. Записати диференціал довжини дуги лінії в полярно-циліндричних координатах.
5. Знайти диференціал довжини дуги лінії в сферичних координатах.

6. Записати натуральну параметризацію гвинтової лінії  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ht$ .

7. Скласти параметричне рівняння дотичної до лінії  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x = y \end{cases}$  у точці  $M(x_0; y_0; z_0)$ .

8. Скласти рівняння нормальної площини лінії  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  в точці  $M(x_0; y_0; z_0)$ .

9. Довести, що всі нормальні площини кривої  $\vec{r} = \{a \sin^3 t, a \sin t \cos t, a \cos t\}$  проходять через початок координат.

10. Скласти рівняння дотичної прямої і нормальної площини лінії, заданої перетином двох поверхностей  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ .

11. Знайти дотичну і нормаль до циклоїди Діоклеса  $x = \frac{a}{t^2+1}$ ,  $y = \frac{a}{t(t^2+1)}$  у довільній точці. Довести, що циклоїда є множиною точок, симетричних вершині параболи відносно її дотичних.

12. Довести, що тангенс кута  $\varphi$  між радіус вектором поточної точки М спіралі Архімеда і дотичної до спіралі в цій точці дорівнює полярному куту. До чого прямує кут  $\varphi$  при віддаленні точки М до нескінченності? (Спіраль Архімеда у полярній системі координат визначається рівнянням  $\rho = \alpha\theta$ ,  $\alpha = \text{const}$ ).