Лекція 8. Крива. Дотична.

Вектор-функція. Неперервна параметризована крива на площині та в просторі. Гладка крива. Проста та замкнена криві. Дотичний вектор. Регулярна точка. Регулярна крива. Гомеоморфізм. Еквівалентні параметризації. Дотична. Рівняння дотичної. Література [1, с.3-17; 3, с. 8; 5, с.5-8; 4, с.3-5].

Вектор-функцією називається відображення $\boldsymbol{r}:U\to V$ деякої множини U в векторний простір V.

Ми будемо розглядати такі відображення у яких U – "гарна" підмножина прямої $\mathbf{R}$. "Гарними" вважаються такі множини: $[a, b]$, (a, b), $(-\infty, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, де $a<b$.

Нехай $V = \mathbf{R}^n$. Зафіксуємо систему координат $(x_1,\ldots, x_n)$ і метрику d:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\,.$$

Неперервною кривою в $\mathbf{R}^n$ називається неперервна вектор-функція $\boldsymbol{r}: U \to \mathbf{R}^n$, де U – гарна підмножина прямої $\mathbf{R}$. Образ кривої називається *лінією*.

Будемо задавати криві *векторно-параметричним* рівнянням:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

або *параметричними* рівняннями:

$$x_1 = x_1(t),$$

$$.....$$

$$x_n = x_n(t),$$

де *параметр* $t \in U$.

Криві описують рух деякої точки, а лінії є траєкторіями руху. Параметр t є часом, $\boldsymbol{r}(t)$ – радіус-вектором точки, а $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – його координатами.

Приклад. Крива $\boldsymbol{r} = \{t, t^2\}$ задає параболу $y = x^2$ на площині.

Очевидно, що образом кривої може бути точка (вироджена крива). Як показав Пеано образом кривої може бути квадрат. Щоб позбутися таких кривих, на криві накладають ряд додаткових умов, які будуть розглянуті далі.

Неперервна крива називається *гладкою* (класу C^k), якщо всі координатні функції $x_i(t)$ є гладкими (класу C^k).

Дотичним вектором до гладкої кривої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в точці t називається вектор

$$\boldsymbol{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \{x'_1(t), \ldots, x'_n(t)\}.$$

Точка $t \in U$ називається *регулярною*, якщо $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ і *особливою*, якщо $\boldsymbol{r}'(t) = 0$. Гладка крива, всі точки якої регулярні, називається *регулярною*.

Приклад. Крива $\boldsymbol{r} = \{t, t^2\}$ - регулярна, а крива $\boldsymbol{r} = \{t^3, t^2\}$ має особливу точку $t = 0$ (точку "загострення").

Нехай $U, V \subset \mathbf{R}$ – "гарні" підмножини прямої. Взаємно-однозначне відображення $\varphi: U \to V$ називається *гомеоморфізмом*, якщо φ та φ^{-1} – неперервні, і *дифеоморфізмом*, якщо φ та φ^{-1} – гладкі (диференційовані). Зауважимо, що відображення $\varphi:[a,b] \to [a_1,b_1]$ буде гомеоморфізмом, якщо воно є неперервним, монотонним і $\varphi(a) = a_1$, $\varphi(b) = b_1$ або $\varphi(a) = b_1$, $\varphi(b) = a_1$. Відображення φ буде дифеоморфізмом, якщо 1) для кожного $t \in U$ існує $\varphi'(t) \neq 0$ і 2) $\varphi(a) = a_1$, $\varphi(b) = b_1$ або $\varphi(a) = b_1$, $\varphi(b) = a_1$.

Дві неперервні (гладкі) криві $\boldsymbol{r}$: $U \to \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{r}_1$: $U_1 \to \mathbf{R}^n$ називаються *еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) $\varphi: U \to U_1$, такий, що $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1(\varphi(t))$.

Клас еквівалентних кривих називається *непараметризованою* кривою.

Інколи непарематривозанні криві називають просто кривими, а відображення $\boldsymbol{r}$: $U \to \mathbf{R}^n$ їх параметризаціями. Отже, (непараметризована) крива - це клас еквівалентних параметризацій.

Зауважимо, що регулярність кривої не залежить від параметризації, а дотичний вектор множиться на скаляр $\varphi'(t)$ при зміні параметризації.

Вправа. Чи вірно те, що дві параметризації регулярних кривих еквівалентні, якщо вони мають однакові образи – лінії?

Нехай $\boldsymbol{r}: U \to \mathbf{R}^n$- регулярна крива.

Дотичною в точці t_0 називається пряма, що проходить через $\boldsymbol{r}(t_0)$ і паралельна дотичному вектору $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Її рівняння $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0) + \tau \boldsymbol{r}'(t_0)$, де τ-параметр.

При $n = 2$пряма, що проходить через точку кривою і перпендикулярна до дотичного вектора в цій точці називається *нормаллю*. Якщо крива задана рівнянням $F(x, y) = 0$ і (x_0, y_0) - точка на кривій, то рівняння дотичної в цій точці має вигляд

$$F_x(x_0, y_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0)(y-y_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$F_y(x_0, y_0)(x-x_0) - F_x(x_0, y_0)(y-y_0) = 0.$$

При n = 3площина, що проходить через $\boldsymbol{r}(t_0)$ і перпендикулярна до $\boldsymbol{r}'(t_0)$ називається *нормальною площиною.* Рівняння дотичної

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Рівняння нормальної площини

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0)) = 0.$$

Вправи.

1.Довести, що якщо *функції* $\overrightarrow{r_1}(t)$, $\overrightarrow{r_2}(t)$, $\overrightarrow{r_3}(t)$ і $f(t)$ диференційовані, то мають місце такі рівності:

1)$(\overrightarrow{r_1}(t) \pm \overrightarrow{r_2}(t))' = \overrightarrow{r_1}'(t) \pm \overrightarrow{r_1}'(t)$;

2)$(f(t)\vec{r}(t))' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$;

3) $(\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t))' = \left(\overrightarrow{r_1}'(t),\ \overrightarrow{r_2}(t)\right) + (\overrightarrow{r_1}(t),\ \overrightarrow{r_2}'(t))$;

4) $[\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t)]' = \left[\overrightarrow{r_1}'(t), \overrightarrow{r_2}(t)\right] + [\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}'(t)]$;

5) $(\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}(t))' = \left(\overrightarrow{r_1}'(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}(t)\right) + \left(\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}'(t), \overrightarrow{r_3}(t)\right) + \left(\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}'(t)\right)$.

2.Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$.Знайти похідні по t від таких функцій :

1) $\overrightarrow{r^2}$ *2)* $[\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}]$ *; 3)* $(\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''})$ *; 4)* $(\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}, \overrightarrow{r'''})$ *; 5)* $\sqrt{\overrightarrow{r'^2}}$ *; 6)* $\sqrt{[\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}]^2}$.

3. На інтервалі $(t_1\ ,\ t_2)|\vec{r}(t)|\ = \mathrm{const}$. довести, що$\vec{r}' \perp \vec{r}$ на цьому інтервалі. Чи вірне обернене твердження?

4. Довести, що якщо $|\vec{r}\,'(t)| = 0$ при всіх $t\ \in (t_1\ ,\ t_2)$, то на цьому інтервалі$\vec{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Чи можна стверджувати обернене?

5. Чи вірна рівність $|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}(t)|'$*?*

6. На відрізку $[\boldsymbol{t_1}\ ;\ \boldsymbol{t_2}]$ вектор-функція $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ неперервна разом зі своєю похідною $\vec{\boldsymbol{r}}\,'(\boldsymbol{t})| \quad |\vec{\boldsymbol{r}}\,'$, причому$\vec{\boldsymbol{r}}\,' \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}\ \neq\ \vec{\mathbf{0}}$. Довести, що лінія $\vec{\boldsymbol{r}} =\ \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$це пряма (або її відрізок).

7. Яка крива задається рівнянням$\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{t} + \vec{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$, де $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ і $\vec{\mathbf{c}}$ - постійні вектори?

8. Довести, що якщо вектори $\vec{\mathbf{b}}$ і $\vec{\mathbf{c}}$ не колінеарні , то рівняння $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathbf{cht} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathbf{sht}$ задає гіперболу.

9. Точка M рівномірно обертається навколо деякої прямої і одночасно переноситься рівномірним рухом паралельно цій прямій. Лінія, що описується точкою M, називається гвинтовою лінією. Скласти рівняння цієї лінії.

10. Складати параметричне рівняння кривої $\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{z}$.

11. Якому класу регулярності належить лінія $\boldsymbol{\gamma}$, що задана рівняннями

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{e}^{\frac{1}{t}}, \text{якщо } \boldsymbol{t} < 0 \\ \mathbf{0}, \text{якщо } \boldsymbol{t} > 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{z} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{якщо } \boldsymbol{t} \leq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{e}^{\frac{1}{t}}, \text{якщо } \boldsymbol{t} > 0 \end{cases}$$

12. Встановити, чи еквівалентні наступні параметризації :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}, \ i \begin{cases} x = a\cos(\tau^3 + 1) \\ y = a\sin(\tau^3 + 1) \\ z = h(\tau^3 + 1) \end{cases}$$

Де $0 \le t \le 2\pi$, $-1 \le \tau \le \sqrt[3]{2\pi - 1}$.

13. Довести, що параметризації $x = cost$, $y = sint, z = t, 0 \le t \le 4\pi$ *і* $x = cos\tau^2$, $y = sin\tau^2$, $z = 2\tau$, $0 \le \tau \le 2\pi$ не еквівалентні.

14. Написати параметричне рівняння кривої $y^2 = 2px$, $x + y - z = 0$.

15. Записати рівняння дотичної до лінії $\vec{r} = \left\{\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right\}$ в довільній точці, де $t \ne 0.$

16. Довести, що дотична до гвинтової лінії $x = acost$, $y = asint$, $z = ht$ утворює постійний кут з віссю OZ.

17. Знайти дотичну до лінії $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{a} = \{3, 1, 1\}$.

18. Скласти рівняння дотичної до лінії $\vec{r} = \{t^2, t, e^t\}$, яка паралельна до площини $x - 2y - 5 = 0$.

19. Довести, що якщо дотичні гладкої кривої проходять через одну точку, то крива є відрізком, півпрямою або прямою.

20. Довести, що якщо дотичні кривої паралельні деякій площині, то крива є плоскою.